Singular Block Bundles and 3-Manifolds (Combinatorial Topology)

AUTHOR(S):

池田, 裕司

数理解析研究所講究録
152巻 1972年 1-20

Singular block bundles and 3-manifolds

神戸大　池田裕司

§1 Introduction

［2］に於て，我々は fake surface なる概念を導入した。それは 3-manifold を研究する時には非常に有効なものであると思われる。と云うのは，例えば，boundary を持つ 3 次元 manifold は例外なく closed fake surface を spine として持つ事が解っている点などからも想像される。

ところで，或る manifold が manifold を spine として持っているような時は，Combinatorial prebundle［1］だとか Block bundle［3］などの非常に強力な道具が開発されて，素晴らしい進歩を遂げたわけであるが，全ての manifold（勿論 boundary を持つ）が manifold を spine とすると云うのは信じ難い事だし，実際，反例もすぐ出来る。そこで，base space が polyhedron である事は容認して，total space が manifold になる，そんな都合の良い bundle のような構造があるのではないだろうか，と考えてみると，実際存在するのである。それを，singular block bundle と

2

呼ぶ事にする。Prebundle や block bundle は非常に美しいものである。しかし，singular block bundle はその名のように処々に異常が見られ，比較したらそれ程美しいものではないかも知れないし，Prebundle や block bundle で得られたような結果が同じような formulation で得られるとも思わない。Singular block bundle の良い所はまず相手を選ばない事にある。例えば，3-manifold は全て扱えると云うように。（但し，高い次元の事は知りません）だから，Block bundle よりも間口が広いと云えます。そして，著者が最も欲しかった manifold とその spine を幾何学的に結びつけるものが目に見えるようにそこにある事です。

そこで，以下では fake surface を base space として，3-manifold が total space になる，そう云う singular block bundle を作る事を目的とする事にする。なお，この report では fake surface P については常に $\mathfrak{S}_6(P)=\emptyset$ を仮定する。この仮定は，そうしても何ら有効性を損う点がない事と，そうしないと定義が非常に複雑になってしまう点とから容認されて良いものと思われる。

最後に，この singular block bundle の故郷は，数年前の野口先生の言葉 "Collapsing の inverse image" と云う所です。

§2 Blocks F_A and the fiber-set Σ

まず block とその周辺の定義から始めよう。block そのものは M. Kato の combinatorial pre-bundle [1] に於ける block と同じ概念である。

即ち,

<u>Def. 1.</u> A を simplex, F を polyhedron とした時, <u>block</u> F_A <u>over</u> A <u>with fiber</u> F とは polyhedron $A \times F$ の事を意味する。

以下, "over A with fiber F" を省いて単に block F_A という。

次に block F_A の特別な sub-polyhedron を2種類 (sub-block と restricted block) を定めておく。

<u>Def. 2.</u> G を F の sub-polyhedron とする。この時, block F_A の G に関する <u>sub-block</u> $(F/G)_A$ を

$$(F_A,\ (F/G)_A) = (A \times F,\ A \times G)$$

で定まる F_A の sub-polyhedron と定義する。

<u>Def. 3.</u> simplex B が A の face であるとする。この時, block F_A を B へ制限した <u>restricted block</u> (F_A/B) を

$$(F_A,\ (F_A/B)) = (A \times F,\ B \times F)$$

で定まる F_A の sub-polyhedron と定義する。

Fig. 1 に block, sub-block, restricted block の簡単な図を記しておく。

(注) block F_A は A 又は F が empty の時 empty と約束する。

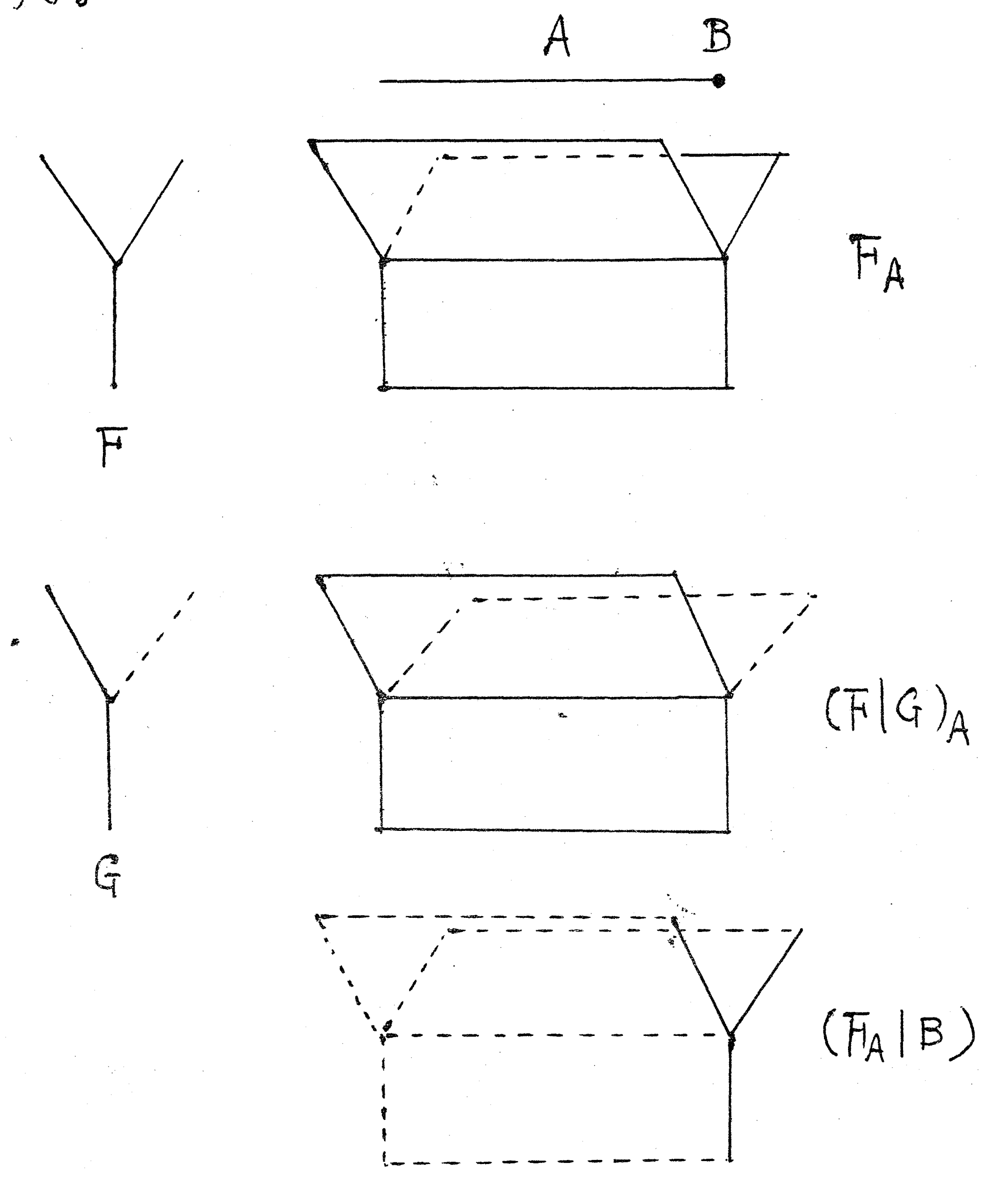


Fig. I

5

勿論, sub-block と restricted block とそれ自身 block である事は明らかである。

又, sub-blocks, restricted blocks に関する次の Lemmas は明らかである。

Lemma. $(F|G_1)_A$, $(F|G_2)_A$ を block F_A の2つの sub-block とする。今 $G_1 \cap G_2 = G_3$ とおく。

$$\Longrightarrow \quad (F|G_1)_A \cap (F|G_2)_A = (F|G_3)_A$$

Lemma. $(F_A|B_1)$, $(F_A|B_2)$ を block F_A の2つの restricted block とする。今 $B_1 \cap B_2 = B_3$ とおく。

$$\Longrightarrow \quad (F_A|B_1) \cap (F_A|B_2) = (F_A|B_3)$$

次に sub-block と restricted block の関係(これも殆ど明らかである)を挙げておく。

Lemma. block F_A の restricted block $(F_A|B)$ を F_B と書いて, $(F|G)_B$ を F_B の sub-block とする。又, F_A の sub-block $(F|G)_A$ を G_A と書く。

$$\Longrightarrow \quad (F|G)_B = (G_A|B)$$

6

さて，次に *fiber-set* Σ なるものを定義する。

<u>Def. 4.</u>　3つの polyhedron J, Y, X から成る集合 $\Sigma = \{J, Y, X\}$ を <u>*fiber-set*</u> と云う。但し，J, Y, X は2次元ユークッド平面 R^2 の sub-polyhedron で次のようにして定義されるものとする。

まず　$J' = \{(-1, 0), (1, 0)\}$,

$Y' = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0)\}$,

$X' = \{(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)\}$

なる R^2 の0次元 sub-polyhedron を考え，

$$J = \mathbf{0} * J', \quad Y = \mathbf{0} * Y', \quad X = \mathbf{0} * X'$$

と定める。但し，$\mathbf{0}$ は R^2 の原点，"$*$" は join を示す。（Fig. 2. 参照）

$\Sigma \ni F$ に対して，R^2 の原点 $\mathbf{0}$ を F の<u>中心</u>と云って $o(F)$ と書く。

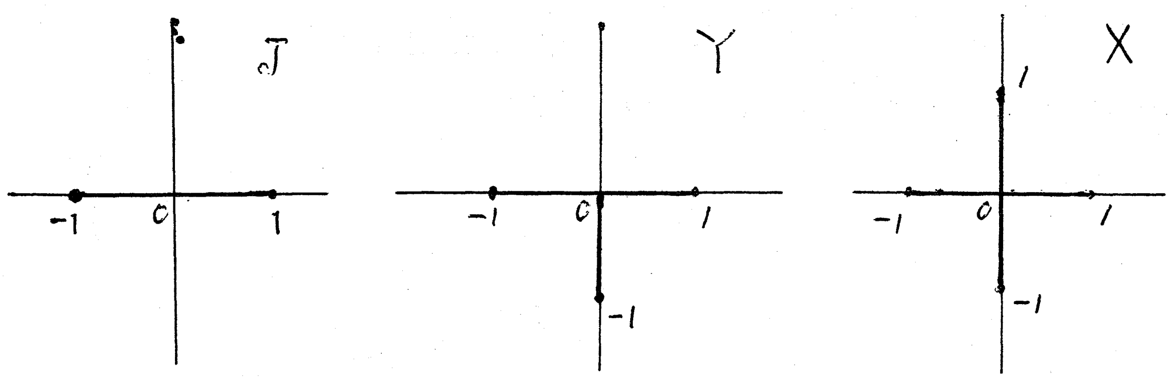


Fig. 2.

以後 "fiber" は Σ の要素 又はその sub-polyhedron を意味するものとする。

$\Sigma \ni F$ に対して, F の sub-polyhedron G を F の sub-fiber と云う。次に幾つか特別な sub-fiber を定めておく。

<u>Def. 5.</u> (i) sub-fiber G が F で <u>proper</u> であるとは $\dim G = 1$ かつ $G \cap \dot{F} = \dot{G}$ を満足する事を云う。

(ii) sub-fiber G が F で <u>semi-proper</u> であるとは, G が $F - O(F)$ の1つの connected component の closure である事を云う。

(iii) sub-fiber G が F で <u>trivial</u> であるとは $G = O(F)$ となっている時を云う。(Fig. 3. 参照)

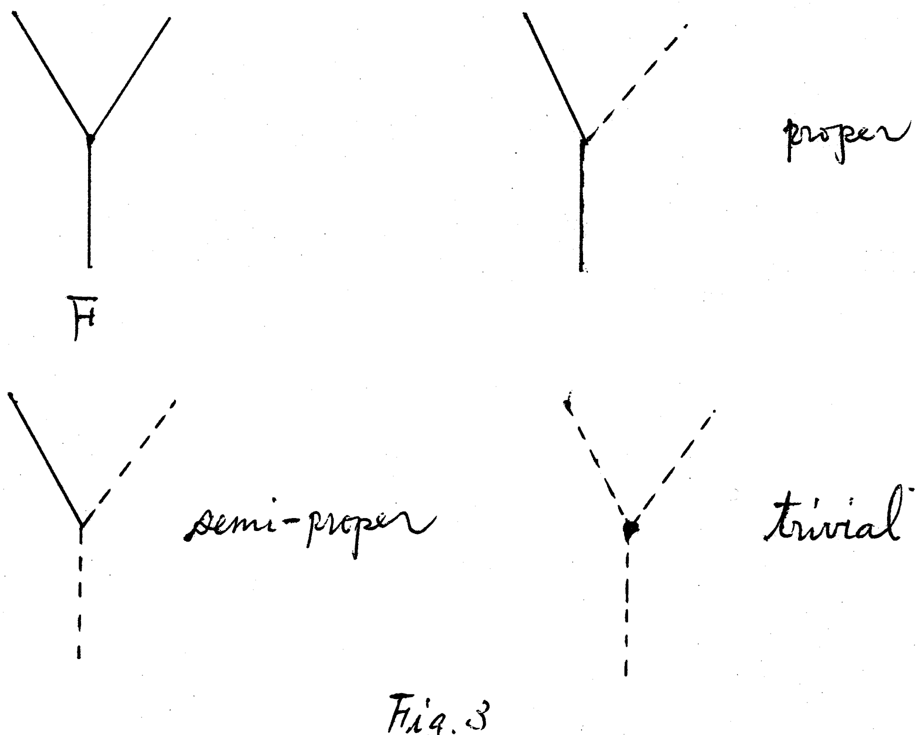


Fig. 3

今, block F_A の sub-block $(F/G)_A$ を考える。この時 G が F で proper, semi-proper, trivial に応じて, sub-block $(F/G)_A$ は main block F_A で proper, semi-proper, trivial と云う。又, 上記 Def. 5. の3種類の sub-fiber を "normal" と云う事にすれば, それに応じて sub-block も "normal" と云う事にする。

次に normal sub-fiber と normal sub-block についての trivial な Lemmas を挙げておく。

<u>Lemma.</u> F <u>を</u> Σ <u>の要素として</u>, G_1, G_2 <u>を</u> F <u>の2つの normal sub-fiber とする。</u>

$\Longrightarrow$ $G_1 \cap G_2$ <u>は</u> F <u>の normal sub-fiber</u> である。

だから, 次も明らかである。

<u>Lemma.</u> F <u>を</u> Σ <u>の要素として</u>, $(F/G_1)_A, (F/G_2)_A$ <u>を block</u> F_A <u>の2つの normal sub-blocks とする。</u>

$\Longrightarrow$ $(F/G_1)_A \cap (F/G_2)_A$ <u>は</u> F_A <u>の normal sub-block.</u>

§3 The base complexes

ここから難関にさし掛るわけである。今、base space としては fake surface [2] を予定しているのであるが、block を simplex 上で定義したから勿論 simplicial structure を考えなければいけない。そこで simplicial complex K が simplicial fake surface（略して S.F.S と書く）とは K の underlying polyhedron $|K|$ が fake surface となる事と定める。すると、$|K|$ の i-番目 の singularity $\mathfrak{S}_i(|K|)$ を triangulate する K の sub-complex $\mathfrak{S}_i(K)$ が定まるなどは当然である。

ここで問題にしようとしているのは、S.F.S K が与えられた時、K の 2 つの simplex の関係の深さを定義する事である。即ち、K の 2 つの simplex A, B が K でどの程度に深い関係にあるかによって、A, B 上の block F_A, G_B の関係が定まる事を目論んでいるわけである。

以下、この節では、K は S.F.S、K の 2 つの simplex A, B は $A \cap B = C \neq \emptyset$ を満足するものとして、まず Def. 6. で A, B の関係を 2 つに分ける（深い関係と浅い関係）、そして、次に Def. 7. で上の浅い方の関係を更に 3 つのクラスに分ける（殆ど関係ない、少し関係がある、もう少し関係がある）。

Def. 6. (Fig. 4. 参照) A, BがKで(singularityの)同じ側(深い関係)にあるとは，番号 i と $\mathfrak{S}_i(K)$ の vertex v が存在して，次の2つの条件(a), (b) を同時に満足する事を云う。

(a) $A, B \in \mathfrak{S}_i(K) - \mathfrak{S}_{i+1}(K)$

(b) $|st(v, \mathfrak{S}_i(K))| - |st(v, \mathfrak{S}_{i+1}(K))|$ の connected component D が存在して

$$D \supset \mathring{A} \cup \mathring{B} \cup \mathring{C}$$

を満足する。但し ° は interior を示す。

A, BがKで同じ側にない時，A, BはKで異なる側(間に邪魔者がいる)にあると云う。

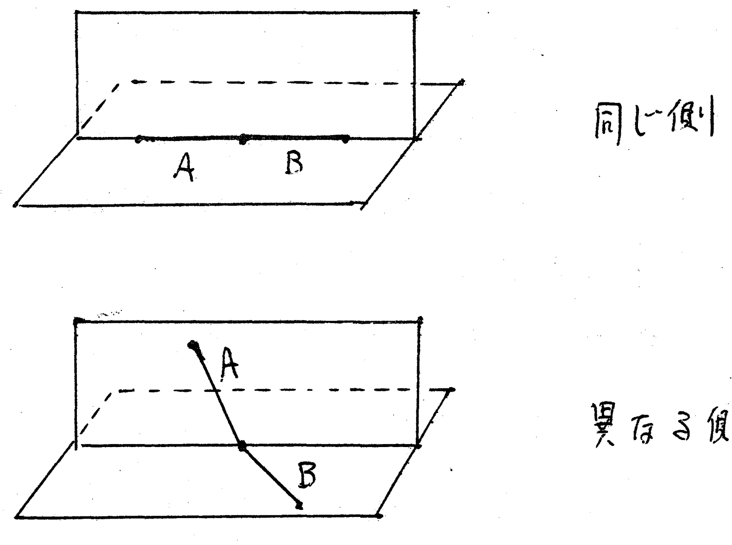


Fig. 4

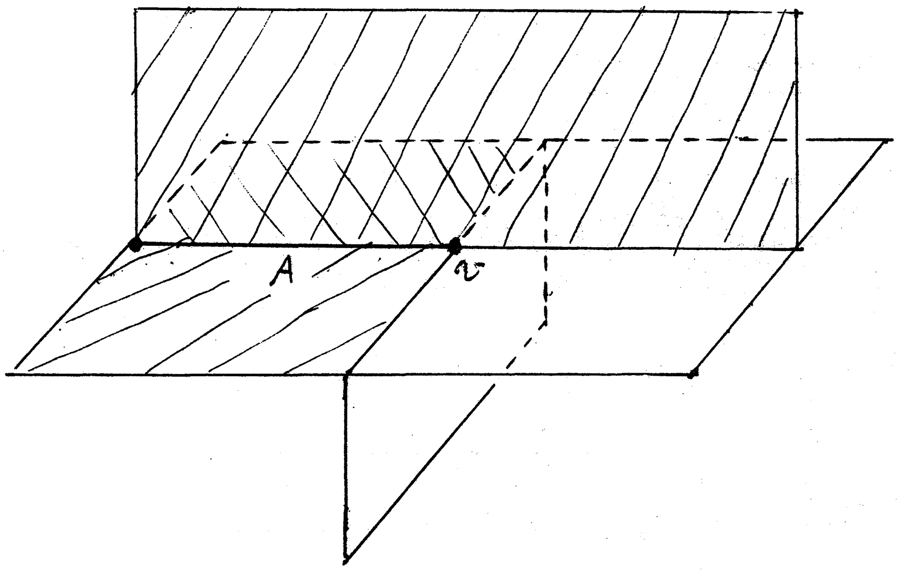
11

更に、異なる側にある simplex A, B の邪魔者の程度に3つの段階をつけるためにまず次を考える。

A を K の simplex として、K の vertex v が $st(v, K) \supset A$ を満足した時、D_i を $|st(v, K)| - |st(v, \mathfrak{S}_2(K))|$ の connected component で closure $\overline{D_i}$ が A を含むものとする。ここで

$$D(A, v) = \bigcup_i \overline{D_i}$$

とおく。(Fig. 5. 参照)



斜線部分 $= D(A, v)$

Fig. 5.

Def. 7. (1) A, B が <u>0-related</u>（殆ど関係がない）であるとは次の条件 (a), (b) を同時に満足する事である。

(a) $A, B \in K - \mathfrak{S}_2(K)$

(b) K の vertex v が存在して，$D(A, v) \cap D(B, v)$ は 0-次元である。

(2) A, B が <u>1-related</u>（少し関係がある）と云うのは，まず，K の vertex v が存在して，$D(A, v) \cap D(B, v)$ は 1-次元であり，かつ，次の条件 (a), (b) の中どちらか一方を満足する事を云う。

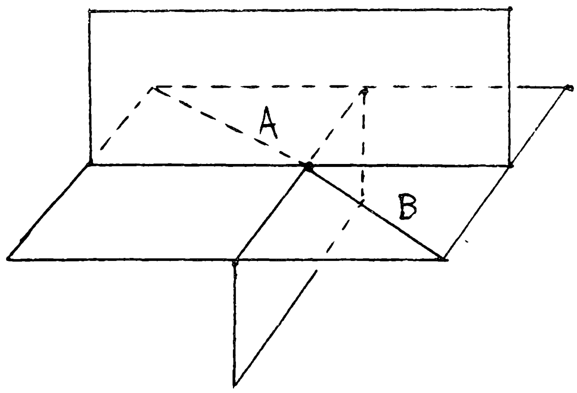
(a) $A, B \in K - \mathfrak{S}_2(K)$

(b) $A \in K - \mathfrak{S}_2(K)$, $B \in \mathfrak{S}_2(K) - \mathfrak{S}_3(K)$

(3) A, B が <u>2-related</u>（もう少し関係がある）と云うのは，0-, 1-related でない時を云う。

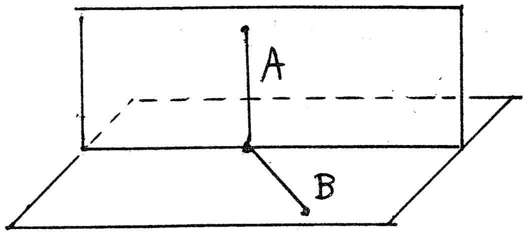
（Fig. 6. 参照）

<u>Fig. 6</u> (1)

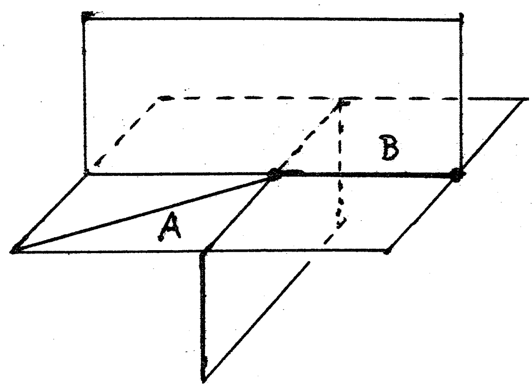


0-related

Fig 6 (2)

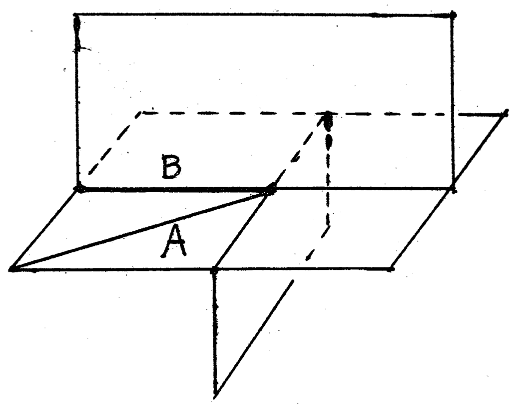


1-related (a)



1-related (b)

Fig. 6 (3)



2-related

（注） 0-related 及び 1-related（も）の場合は v が必然的に $\mathfrak{S}_3(K)$ の vertex にならざるを得ない。

今，ここで SFS K に対して，

$$\Omega(K) = \{ (A, B) \mid A, B \in K,\ A \cap B \neq \emptyset \}$$

とおいて，$\Omega(K)$ の sub-set $\Omega_i(K)$，$i = 0, 1, \cdots, 3$ を次のように定める。

(1) $i = 0, 1, 2$ の時，$\Omega_i(K) \ni (A, B)$ とすると，A, B は i-related である。

(2) $\Omega_3(K) \ni (A, B)$ とすると，A, B は同じ側。

すると，次の Proposition は殆ど明らかに成立する。

<u>Prop</u> (1) $\Omega_i(K) \cap \Omega_j(K) = \emptyset$ if $i \neq j$.

(2) $\Omega(K) = \bigcup_i \Omega_i(K)$

次の Proposition の証明には $\mathfrak{S}_0(K) = \emptyset$ が必要である。

<u>Prop</u> K は SFS で K_1 は K の sub-division，(A, B) は $\Omega_i(K)$ に属するとして，K_1 の simplex A_1, B_1 は

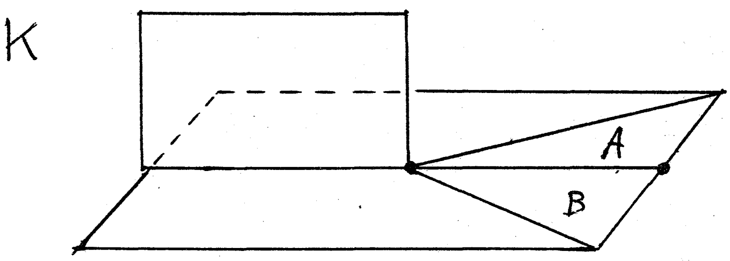
$$\mathring{A}_1 \subset A, \quad \mathring{B}_1 \subset B \text{ かつ } A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$$

を満足するものとする。

$\Longrightarrow$ $(A_1, B_1) \in \Omega_i(K_1)$。

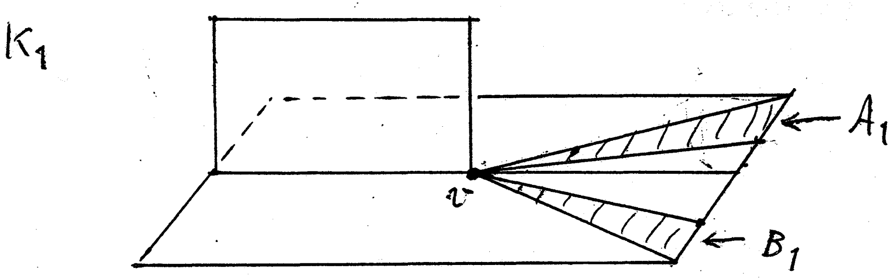
15

次に，上記 Proposition で $\mathfrak{E}_6(K)=\emptyset$ を仮定しない時の反例を挙げておく。



上のように A, B を選ぶ（A, B は 2-simplex）と明らかに $(A, B) \in \Omega_3(K)$，即ち A, B は同じ側にある。

ここで K_1 を次のようにする。



A_1, B_1 を図のように定めれば Prop の条件は満足されるけれども，(A_1, B_1) は $\Omega_3(K_1)$ には属さない。何故ならば，$(A_1, B_1) \in \Omega_2(K_1)$ となる事は v として丁度，A_1, B_1 の intersection を採らざるを得ない事から明らかであるからである。

§4 Singular block bundles

ここで，SFS K に対して singular block bundle を定義する。

<u>Def. 8.</u> $B(K) = \{\eta\}$ なる set を考える。但し，η は下の条件 (1), (2), (3) を満足する polyhedron である。この時，η を K 上の <u>singular block bundle</u> という。

(1) K の任意の simplex A に対して，η の block F_A が unique に次のように定まっている。（Fig. 7. 参照）

(a) $A \in K - \mathfrak{S}_2(K)$ の時，$F = J$。

(b) $A \in \mathfrak{S}_2(K) - \mathfrak{S}_3(K)$ の時，$F = Y$。

(c) $A \in \mathfrak{S}_3(K)$ の時，$F = X$。

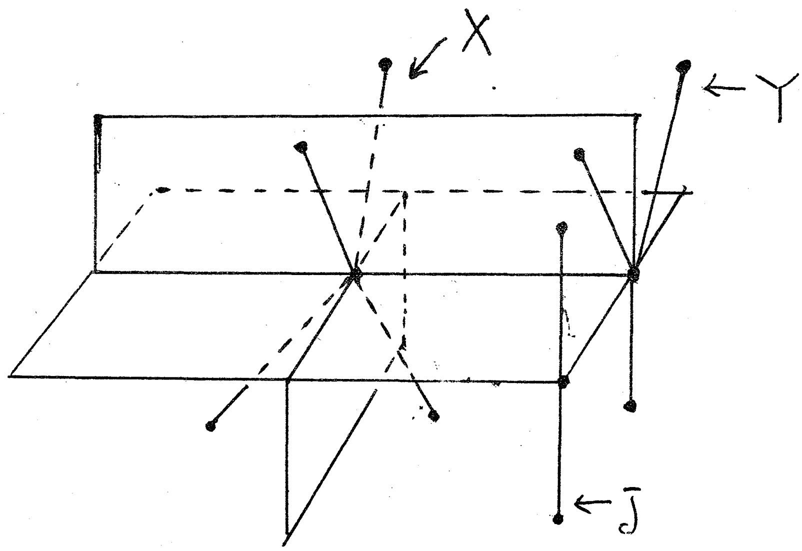


Fig. 7

(2) $\eta = \bigcup F_A$, $A \in K$, 即ち η は block F_A の union である。但し, K の simplex A と F_A の sub-block $(F|o(F))_A = A \times o(F)$ は identify する。

(3) (blocks の intersection に対する条件)

A, B, C を K の simplex で $A \cap B = C$ であるとする。今, F_A, G_B, H_C を η の A, B, C 上の各 block とした時, F_A と G_B の intersection は

$$F_A \cap G_B = (F_A|C) \cap (G_B|C)$$

であり, かつ

$$(F_A|C) = (H|H_1)_C, \quad (G_B|C) = (H|H_2)_C$$

となる H_C の proper sub-blocks $(H|H_i)_C$, $i=1,2$ が存在する。更に $H_1 \cap H_2 = H_3$ とおいて, 次の条件(a)〜(d)を要求する。(Fig. 8. 参照)

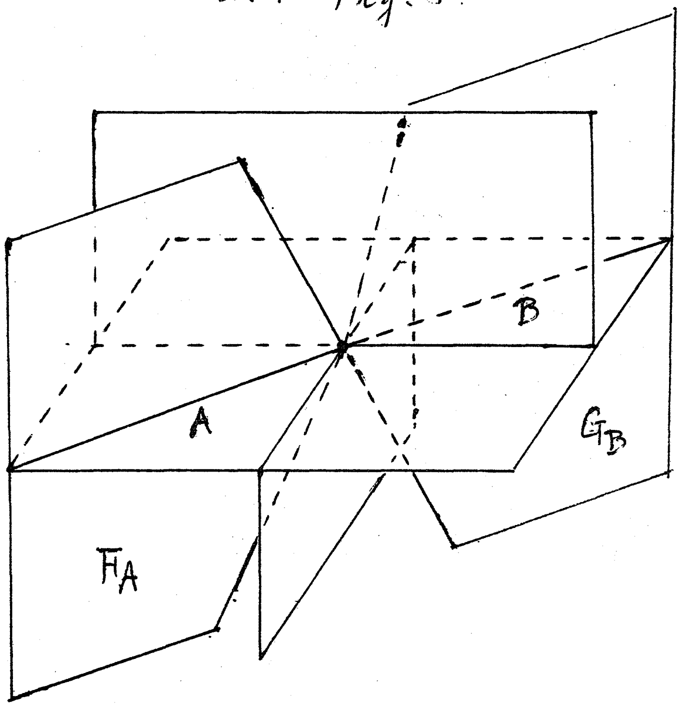
(a) (A, B) が $\Omega_0(K)$ に属する時, H_3 は H の trivial sub-fiber, 即ち $H_3 = o(H)$。

(b) (A, B) が $\Omega_1(K)$ に属するならば, H_3 は H の semi-proper sub-fiber である。

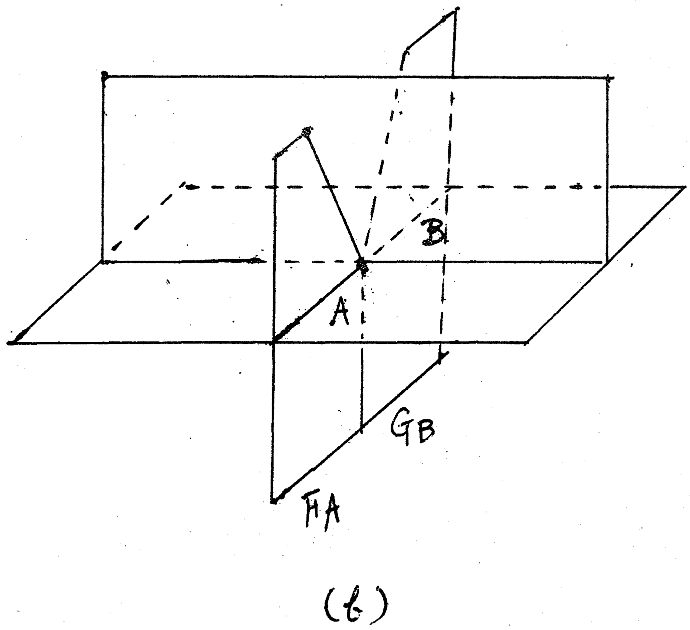
(c) (A, B) が $\Omega_2(K)$ に属するならば, $H_1 \neq H_2$ で H_3 は H の proper sub-fiber。

(d) (A, B) が $\Omega_3(K)$ に属するならば, $H_1 = H_2$ である。

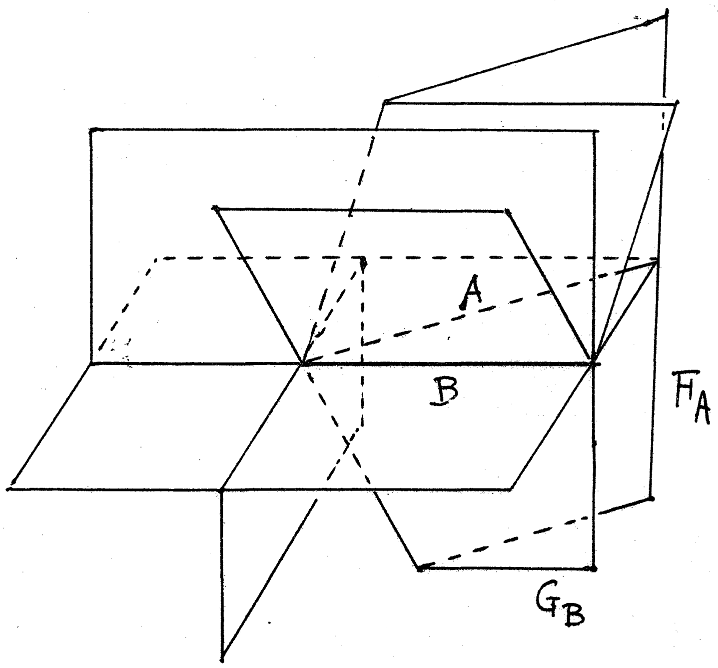
以下 Fig. 8



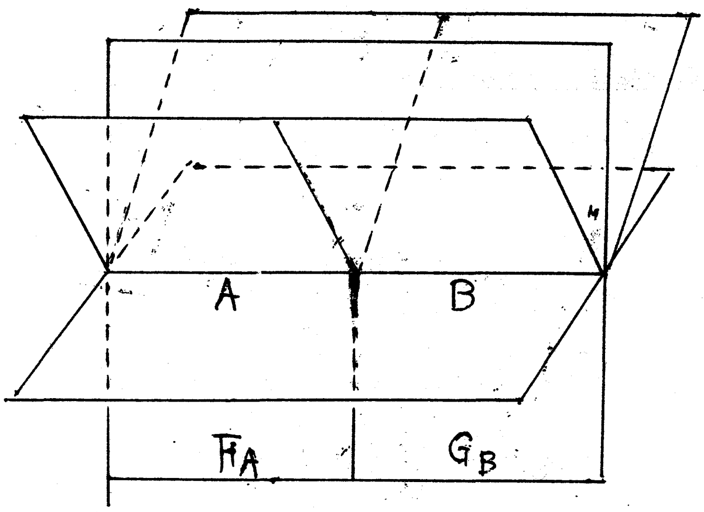
(a)



(b)



(c)



(d)

20

§5 Some results

引き続き定義しなければならない事も沢山あるけれど，それは大体普通の bundle theory に準じたものだから省く事にして，少し結果を挙げておく。

Theorem 1. $B(K)$ の任意の要素 η は K を spine とする 3-manifold である。

逆に

Theorem 2. V を 3-manifold で $\dot{V} \neq \emptyset$ とする。今，K を V の任意の normal spine で $\mathfrak{S}_6(K)=\emptyset$ とする。

$\Longrightarrow$ $B(K)$ の要素 η が存在して $\eta = V$ となる。

この2つの定理は，むしろそうなるように singular block bundle を作ったのだから当然であるが，例えば，もう少し考えると，「(closed) fake surface が 3-manifold の spine になる必要十分条件」なども得られる。

References

[1] M. Kato, Combinatorial prebundles I

[2] H Ikeda, Acyclic fake surfaces

[3] Rourke & Sanderson, Block bundles I